Fen-Edebiyat Fakültesi	SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz III	
İmza:	Sınav Tarihi: 5 Ocak 2017	

Her soru eşit değerdedir. Yalnızca 5 soru seçiniz ve onları cevaplayınız. Süre 90dk.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(e^{nx})}{(x^2+1)(n+2)(n+3)}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterin.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ serisinin $[0,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterin.

3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{if } x \geq 0 \\ -\cos x, & \text{if } x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $(-\pi,\pi)$ üzerindeki Fourier serisini hesaplayınız. Bu Fourier serisinin noktasal olarak yakınsadığı fonksiyonu belirleyiniz.
(Yardım: $\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v)+\cos(u+v))$, $\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u+v)+\sin(u-v))$)

4. $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}+x+2x^2}\,dx$ integrali yakınsak mıdır, ıraksak mıdır? İnceleyiniz.

5. $f_n(x) = \frac{x}{1+(nx-1)^2}$ fonksiyon dizisinin $A=[0,1]$ kümesi üzerindeki noktasal limitini bulun. Bu yakınsama düzgün müdür?

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (x-1)^{n^2}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve aralığını belirleyiniz. Serinin yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsayıp yakınsamadığını belirleyiniz. Bu yakınsamanın düzgün olduğu bir aralık belirleyiniz.

20

① $\left|\frac{\sin(e^{nx})}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{\sin(e^{nx})}{(x^2+1)(n+1)(n+2)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+0)(n+0)} = \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, Weirstrass-M testi uygularsak soru çözülmüş olur.

② Dirichlet yeterlilik testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ serisi

8

eğer f_n'ler pozitifse, azalıyorsa ve $\|f_n\| \to 0$ ise, düzgün yakınsar.

i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,\infty).$

6 ii) $e^{(n+1)x} \geq e^{nx} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,\infty)$ ve $\sqrt{(n+1)^2+x^2} \geq \sqrt{n^2+x^2}$

$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$

6 iii) $\|f_n\| \leq \frac{1}{e^0\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \Rightarrow \|f_n\| \to 0.$

(3) $f(x)$ tek fonksiyonu.

$\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin nx\,dx$$

$$\sin nx\cos x = \frac{1}{2}\left[\sin(nx+x) + \sin(nx-x)\right]$$

$$\int_0^{\pi}\sin((n+1)x)\,dx = -\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\int_0^{\pi}\sin((n-1)x)\,dx = \begin{cases} -\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\Big|_0^{\pi}, & n\neq 1 \\ 0, & n=1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\left[(-1)^{n-1}-1\right]}{n-1} & n\neq 1 \\ 0 & , n=1 \end{cases}$$

$$= -\frac{\left[(-1)^{n-1}-1\right]}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{\left[(-1)^n+1\right]}{(n+1)(n-1)}$$

$$b_{2n-1} = 0, \quad b_{2n} = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{-2}{2n+1} + \frac{-2}{2n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}$$

$f(x)$'in Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin(2n\,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}\sin(2n\,x) = \begin{cases} \cos x, & 0<x<\pi \\ -\cos x, & -\pi<x<0 \\ 0, & x=-\pi,0,\pi \end{cases}$$

④ $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [0,\infty)$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\arctan x}{\sqrt{x}+x+2x^2}\right| dx \leq \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x+2x^2}\, dx \quad ④$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x+2x^2}\, dx + \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x+2x^2}\, dx \quad ④$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{2x^2}\, dx$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_0^1 = 2 \quad ⑥ \quad , \quad \int_1^\infty x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^\infty = 1 \quad ⑥$$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\arctan x}{\sqrt{x}+x+2x^2}\right| dx \leq \frac{\pi}{2}\cdot 2 + \frac{\pi}{4}\cdot 1 = \frac{5\pi}{4}$$

Yani integral mutlak yakınsak yani yakınsak.

⑤ $$f_n' = \frac{1\cdot\left(1+(nx-1)^2\right) - x\cdot 2\cdot n\,(nx-1)}{\left[1+(nx-1)^2\right]^2} = 0$$

$$1 + n^2x^2 - \cancel{2}nx + 1 - 2n^2x^2 + 2n\cancel{x} = 0$$

$$2 - n^2x^2 = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{n}. \quad \text{5 puan}$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ , \ x \in (0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0.$ 5 puan

x	0		$\sqrt{2}/n$		1
f_n'		$+$		$-$	
f_n		↗		↘	

$$\Rightarrow \|f_n\|_{[0,1]} = f_n\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}/n}{1+\left(n\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}-1\right)^2}$$

$$\|f_n\| = \frac{\sqrt{2}}{n(\sqrt{2}-1)^2} \quad \text{5 puan} \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(\sqrt{2}-1)^2} = 0.$$

Yani yakınsama düzgündür. 5 puan

⑥ $\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (x-1)^{n^2} = 1 + 2(x-1) + 0(x-1)^2 + 0(x-1)^3$
$+ 4^2 (x-1)^4 + 0 + \dots + 2^3 (x-1)^9 + 0 + \dots + 4^4 (x-1)^{16} + \dots$

$a_{(2n)^2} = 4^{2n}$

$a_{(2n-1)^2} = 2^{2n-1}$

$\limsup_{n\to\infty} |a_{4n^2}|^{2/4n^2} = \limsup_{n\to\infty} 4^{2n/4n^2} = \lim_{n\to\infty} 4^{1/2n} = 1.$

$\limsup_{n\to\infty} |a_{(2n-1)^2}|^{1/(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/(2n-1)} = 1.$

$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \max \{ \limsup_{n\to\infty} |a_{(2n)^2}|^{1/(2n)^2} , \limsup_{n\to\infty} |a_{(2n-1)^2}|^{1/(2n-1)^2} \}$

$= \max\{1,1\} = 1.$

$R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

$0 < x < 2$ aralığında yakınsak.

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$ ıraksak.

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (-1)^{n^2} = 1 - 2 + 4^2 - 2^3 + 4^4 - 2^5 + \dots$